6. Correction des exercices

Exercice 5.1 $u_1 = 2$; $u_2 = -1$; $u_3 = 1$; $u_4 = 5$; $u_5 = 11$.

Exercice 5.2 a) $f : n \mapsto 2n+5$.

$u_0 = f(0) = 2\times 0+5 = 5$; $u_1 = f(1) = 2\times 1+5 = 7$; $u_2 = f(2) = 2\times 2+5 = 9$;
$u_3 = f(3) = 2\times 3+5 = 11$; $u_4 = f(4) = 2\times 4+5 = 13$; $u_5 = f(5) = 2\times 5+5 = 15$;

a) $f : n \mapsto \frac{n^2-1}{n+2}$.

$u_0 = f(0) = \frac{0^2-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$; $u_1 = f(1) = \frac{1^2-1}{1+2} = 0$; $u_2 = f(2) = \frac{2^2-1}{2+2} = \frac{3}{4}$;
$u_3 = f(3) = \frac{3^2-1}{3+2} = \frac{8}{5}$; $u_4 = f(4) = \frac{4^2-1}{4+2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; $u_5 = f(5) = \frac{5^2-1}{5+2} = \frac{24}{7}$;

Exercice 5.3 a) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$

$f : x \in]-1;\infty[\mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$u_0 = 0$;$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $u_3 = \frac{3}{2}$; $u_4 = \frac{4}{\sqrt{5}}$; $u_5 = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

b) $u_n = n^2 - \sqrt{n} + 1$

$u_0 = 1$;$u_1 = 1$; $u_2 = 5-\sqrt{2}$; $u_3 = 10-\sqrt{3}$; $u_4 = 15$; $u_5 = 26-\sqrt{5}$.

Exercice 5.4 a) $u_n = 3n^2 - 1$

$u_{n-1} = 3(n-1)^2 - 1$
$= 3(n^2-2n+1) - 1$
$= 3n^2 - 6n + 3 - 1$
$= 3n^2 - 6n + 2$

$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 1$
$= 3(n^2+2n+1) - 1$
$= 3n^2 + 6n + 3 - 1$
$= 3n^2 + 6n + 2$

$u_{2n} = 3(2n)^2 - 1$
$= 3(4n^2) - 1$
$= 12n^2 - 1$

$u_{2n+1} = 3(2n+1)^2 - 1$
$= 3(4n^2+4n+1) - 1$
$= 12n^2 + 12n + 3 - 1$
$= 12n^2 + 12n + 2$

b) $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$

$u_{n-1} = \frac{2(n-1)-1}{(n-1)+1}$
$= \frac{2n-2-1}{n-1+1}$
$= \frac{2n-3}{n}$

$u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1}$
$= \frac{2n+2-1}{n+1+1}$
$= \frac{2n+1}{n+2}$

$u_{2n} = \frac{2(2n)-1}{(2n)+1}$
$= \frac{4n-1}{2n+1}$

$u_{2n+1} = \frac{2(2n+1)-1}{(2n+1)+1}$
$= \frac{4n+2-1}{2n+1+1}$
$= \frac{4n+1}{2n+2}$

Exercice 5.5 a) $u_n = \frac{n^2+n+1}{2n+1}$

$u_{n-1} = \frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{2(n-1)+1}$
$= \frac{n^2-2n+1+n-1+1}{2n-2+1}$
$= \frac{n^2-n+1}{2n-1}$

$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2(n+1)+1}$
$= \frac{n^2+2n+1+n+1+1}{2n+2+1}$
$= \frac{n^2+3n+2}{2n+3}$

$u_{2n} = \frac{(2n)^2+(2n)+1}{2\times(2n)+1}$
$= \frac{4n^2+2n+1}{4n+1}$

$u_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2+(2n+1)+1}{2\times(2n+1)+1}$
$= \frac{4n^2+4n+1+2n+1+1}{4n+2+1}$
$= \frac{4n^2+6n+3}{4n+3}$

b) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}$

$u_{n-1} = \frac{(-1)^{(n-1)+1}}{2((n-1)+1)}$
$= \frac{(-1)^n}{2n}$

$u_{n+1} = \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{2((n+1)+1)}$
$= \frac{(-1)^{n+2}}{2n+4}$

$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)}$
$= \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+2}$
$= \frac{(-1)}{4n+2}$

$u_{2n+1} = \frac{(-1)^{(2n+1)+1}}{2((2n+1)+1)}$

$= \frac{(-1)^{2n+2}}{4n+4}$
$= \frac{(+1)}{4n+4}$

Exercice 5.6 $u_1 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{-\frac{3}{2}}{2} - 3 = -\frac{3}{4} - 3 = -\frac{15}{4}$.

Exercice 5.7 a) $f : x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x}$
$u_0 = 2$ (énoncé)
$u_1 = f(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$
$u_2 = f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$
$u_3 = f(-1) = \frac{-1-1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$
$u_4 = f(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$
$u_5 = f(\frac{1}{2}) = u_2 = -1$
... les résultats vont donc "se répéter", on dit que la suite est *périodique*.

b) $f : x \mapsto f(x) = x(x+1)$
$u_0 = 1$ (énoncé)
$u_1 = f(1) = 1(1+1) = 2$
$u_2 = f(2) = 2(2+1) = 6$
$u_3 = f(6) = 6(6+1) = 42$
$u_4 = f(42) = 42(42+1) = 1806$
$u_5 = f(1806) = 1806(1806+1) = 3263442$
... les valeurs de la suite semblent être de plus en plus grandes, peut-être qu'elle "tend vers l'infini".

Exercice 5.8 1) On peut calculer les premiers termes à la calculatrice, on obtient :
$u_0 = 1$; $u_1 = 1 + 5 = 6$; $u_2 = 6 + 5 = 11$; $u_3 = 11 + 5 = 16$; $u_4 = 16 + 5 = 21$; $u_5 = 21 + 5 = 26$

2) Il semblerait que $u_n = 5n + 1$.

3) Supposons que l'on ait bien, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 5n + 1$.
pour $n = 0$, il vient : $u_0 = 5 \times 0 + 1 = 1$, ce qui est cohérent avec l'énoncé.
Avec cette formule, on aurait : $u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 5 + 1 = 5n + 1 + 5 = u_n + 5$, et l'on retrouve la formule de récurrence donnée dans l'énoncé.

Exercice 5.9 1) On peut calculer les premiers termes à la calculatrice, on obtient :
$u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{1}{4}$; $u_4 = \frac{1}{5}$; $u_5 = \frac{1}{6}$

2) Il semblerait que $u_n = \frac{1}{n+1}$.

3) Supposons que l'on ait bien, pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.
pour $n = 0$, il vient : $u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$, ce qui est cohérent avec l'énoncé.
Avec cette formule, on aurait : $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$.
Toujours avec cette formule, on aurait :
$1 - \frac{1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}}$
$= 1 - \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-(n+1)}{n+2}$
$= \frac{1}{n+2}$, donc on a bien $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+u_n}$.

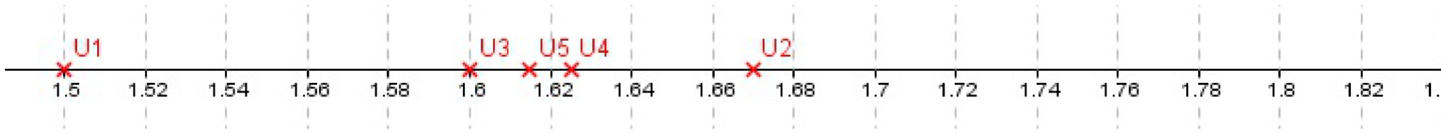
Exercice 5.10 a) $u_0 = 1$, $u_1 = 14$ et $u_2 = 1$, mais on ne peut pas en conclure que la suite est constante ; il s'agit peut-être de coïncidences. "Des exemples ne prouvent rien !".
b) $u_n - 1 = n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2)$
Le second facteur est un polynôme du second degré que nous savons factoriser :
$n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$.
Donc $u_n - 1 = n(n-1)(n-2)$. Or $u_n = 1 \Leftrightarrow u_n - 1 = 0 \Leftrightarrow n \in \{0; 1; 2\}$
Ainsi, seuls trois termes de la suite sont égaux à 1 ; ce sont u_0, u_1, et u_2.

Exercice 5.11 1) $u_0 = 2$; $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{5}{3}$; $u_3 = \frac{8}{5}$.

2) On conjecture que $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

3) Avec cette formule, il vient : $u_4 = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

$u_5 = 1 + \frac{8}{13} = \frac{21}{13}$; $u_6 = 1 + \frac{13}{21} = \frac{34}{21}$ Pour faire une représentation graphique, on prend des valeurs approchées :
$u_0 = 2$; $u_1 = 1,5$; $u_2 \approx 1,67$; $u_3 = 1,6$; $u_4 = 1,625$; $u_5 \approx 1,615$
Les valeurs croissent, puis décroissent, puis croissent, etc...



Les termes de la suite semblent se rapprocher de plus en plus les uns des autres.